第十讲： Bin Packing 的近似算法

一 描述

$0 \le a_1, \cdots, a_n \le 1$ $\quad C=1$ 箱子尺寸

用最少的箱子装下所有物品

First - Fit $\qquad$ Best Fit $\qquad$ Any Fit

First - Fit：每次都选择最先打开

Best Fit：能装下的箱子中放的最满的那个

粗糙分析

如果 $a_i > \frac{1}{2} \Rightarrow$ large item $\quad$ 每个large item 占一个箱子

$\therefore$ large item 的个数构成了一个下界

可证：

$\forall I \quad FF(I) \le 1.7\, OPT(I) + 1$

amortized analysis

$FF(I)$	表示对实例I运用 first fit 得到的目标函数值
$OPT(I)$	表示对实例I的最优目标函数值
B	first fit算法得到的方案
B^*	最优方案
$C(B_j)$	第j个Bin中item体积总和
$W(B_j)$	第j个Bin中item权重总和

做一个映射

对每一个 item, a_i 将其映射到一个权重 $w(a_i)$

$$a_i \xrightarrow{w} w(a_i)$$

对每一个 Bin B

$$w(B) = \sum_{a_i \in B} w(a_i)$$

$$w(I) = \sum_{i=1}^{n} w(a_i)$$

易得

$$W(I) = \sum_{i=1}^{n} W(a_i) = \sum_{j=1}^{FF(I)} W(B_j) = \sum_{j=1}^{OPT(I)} W(B_j^*)$$

分解上述问题

① $W(I) \leq \frac{17}{10} OPT(I)$

② $FF(I) \leq W(I) + 1$

如果能证明:

$\forall B_j^*,\ W(B_j^*) \leq 1.7$，则 $\because W(I) = \sum_{j=1}^{OPT(I)} W(B_j^*) \leq 1.7\,OPT(I)$

如果能证明:

$W(B_i)$ 均值至少为 1，则 $\because W(I) = \sum_{j=1}^{FF(I)} W(B_j) \geq FF(I)$

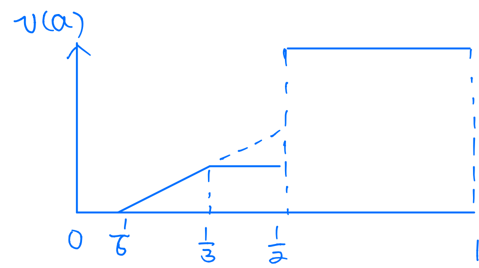
放宽条件，除去一个 Bin，$W(B_i)$ 的均值至少为 1，则

$$W(I) = \sum_{j=1}^{FF(I)} W(B_j) \geq FF(I) - 1$$

给出 W

$$W(a) = \frac{6}{5}a + v(a)$$

$$v(a) = \begin{cases} 0 & a \leq \frac{1}{6} \\ \frac{3}{5}(a - \frac{1}{6}) & \frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{3} \\ 0.1 & \frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2} \\ 0.4 & a > \frac{1}{2} \end{cases}$$



先证 ①：$\forall$ 可行的箱子，$W(B) \leq 1.7$

1. 如果所有物品体积 c 均有 $c \leq \frac{1}{6}$ $v(a) = 0$

1.2 + bonus

这个情况下，bin 的权重就是 bin 中物品体积总和的 1.2 倍，不会超过 1.7。

2. 如果存在物品体积 c 有 $\frac{1}{6} < c \leq \frac{1}{3}$

很显然，这种物品在一个 bin 内至多有 5 个，那么 bonus 不会超过 $\frac{1}{10} \times 5 = \frac{1}{2}$，权重也不会超过 1.7。

3. 如果存在两个物品体积 c_1 和 c_2 有 $c_1 > \frac{1}{2}$ 且 $\frac{1}{3} < c_2 \leq \frac{1}{2}$

很显然，其它物品的体积都不会超过 $\frac{1}{6}$，没有 bonus；c_1 和 c_2 带来的 bonus 恰为 0.5，权重不会超过 1.7。

4. 如果存在三个物品体积 c_1，c_2 和 c_3 有 $c_1 > \frac{1}{2}$，$\frac{1}{6} < c_2, c_3 \leq \frac{1}{3}$ 且 $c_2 + c_3 < \frac{1}{2}$

很显然，其它物品的体积都不会超过 $\frac{1}{6}$，没有 bonus；c_2 和 c_3 带来的 bonus 为 $\frac{3}{5}(c_2 - \frac{1}{6}) + \frac{3}{5}(c_3 - \frac{1}{6}) < 0.1$，再加上 c_1 带来的 bonus 0.4，权重不会超过 1.7。

再证②：

将 $W(B) \ge 1$ 的箱子全部踢走，因为他们已经满足 $W(B) \ge 1$ 的条件

踢走的箱子有

① 装有一个大 item　$W(B) \ge \frac{6}{5} \times \frac{1}{2} + 0.4 = 1$

② 装的 size $\ge \frac{5}{6}$　$W(B) \ge \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} = 1$

③ 装有两个size $\ge \frac{1}{3}$　$W(B) \ge \frac{6}{5} \times \frac{2}{3} + 0.1 + 0.1 = 1$

考虑剩下的$W(B)<1$的箱子，(仍按原来 First Fit 的顺序摆放)

在这些穷人里面，牺牲一个穷人，把他的东西拿过来大家共享一下就能实现共同富裕

有两个结论：

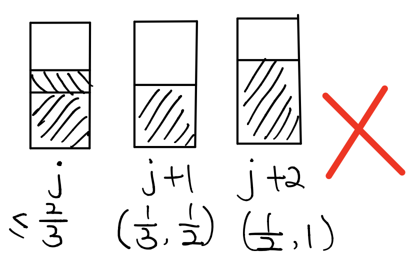
A. 除了最后两个 Bin,其它Bin装的物品的 size 之和都 > 2/3

如果有1个 Bin,装的 size $\le 2/3$

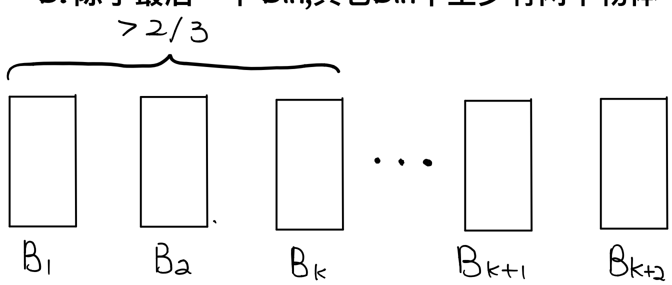
因为 FF 算法，所以后面箱子装的物品 size都要 $> \frac{1}{3}$

因为一个 Bin 不能装2个 size$> \frac{1}{3}$的物品，所以最多只能装1个物品，且其 size $< \frac{1}{2}$

再后面一个箱子装的物品的 size 要$> \frac{1}{2}$，这是做不到的



B. 除了最后一个 Bin,其它Bin中至少有两个物体

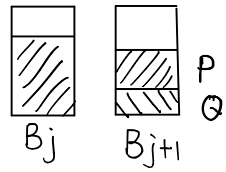


除了倒数两个箱子，其他箱子装的 size 都>2/3，且每个item 的 size 都<1/2，因此每个箱子至少装两个物品

再看倒数第二个Bin，如果其 size<2/3，则B_{k+1}装的 Size 要大于 1/2，否则B_{k+2} 的物品的 size 就要> 1/2，这不可能。B_{k+1} 也至少装两个物品

下证：

$$\frac{6}{5}S(B_j)+v(B_{j+1})\geq 1$$

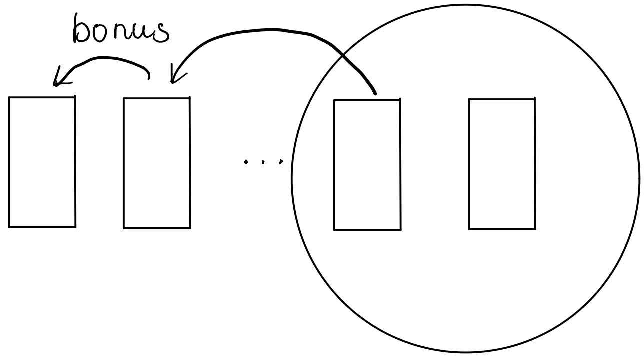


令 $x = 1 - S(B_j)$

$size(P) > x$
$size(Q) > x$

$$\frac{6}{5}S(B_j)+v(B_{j+1})$$
$$\geq \frac{6}{5}S(B_j)+v(P)+v(Q)$$
$$\geq \frac{6}{5}(1-x)+\frac{3}{5}\left(x-\frac{1}{6}\right)\times 2$$
$$= 1$$

这个定理是说一个箱子的 size 和下个箱子的 bonus,使得W(B)=1



最后2箱子

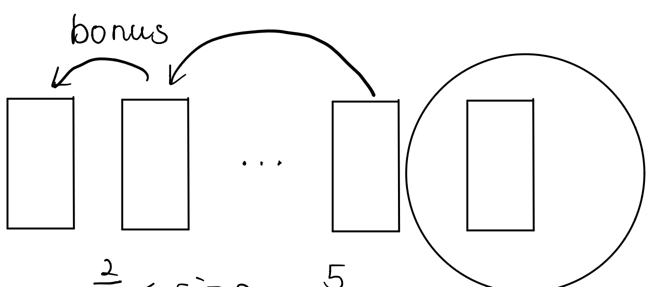
$\Sigma size \geq 1$

$\therefore \Sigma w \geq 1.2$

额外加上0.8之后

$\overline{w} \geq 1$

即 $FF(I) \leq w(I) + 0.8$



$\frac{2}{3} < size < \frac{5}{6}$

最后1箱子

$\frac{1}{6} \leq size < \frac{1}{3}$

$w \geq 0.2$

额外加上0.8之后

$\overline{w} \geq 1$

即 $FF(I) \leq w(I) + 0.8$

证：$A(I) \le (1+\varepsilon)OPT(I)+1$

① 只考虑 items $> \varepsilon$

每个箱子最多装 $\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$ 个

② item的类型只有常数种　　多项式时间可以求解

引入向量 $[b_1, b_2, \cdots, b_k]$　　$K^{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor}$ 种可能性

第几个类型装了几个

$[0, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor]$ 范围

一个向量构成了装箱的一个pattern[一个箱子怎么装物品]

写出线性规划

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ji} x_j \ge b_i$$

$$x_j \in Z^+ \ (x_j \ge 0)$$

x_j：第j个patter使用的个数

t_{ji}：第j个patter装的第i个物品的数量

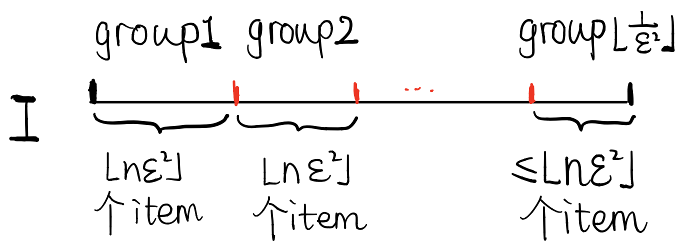
b_i：第i个物品的总数

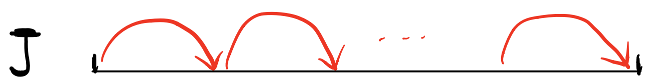
③ 若 item 类型并非常数种，则想办法将其变成常数种

比如，将所有 item分成常数组,同一组内物品的size都变成该组内物品size的最大值，那么相当于我们有常数种item类型

首先对物品按照 size 从小到大排序

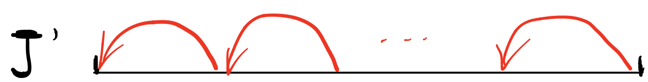
然后将物品分成 $\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor$个组，





进行向上rounding $\Longrightarrow$ group中item的大小全部变成组中size最大值

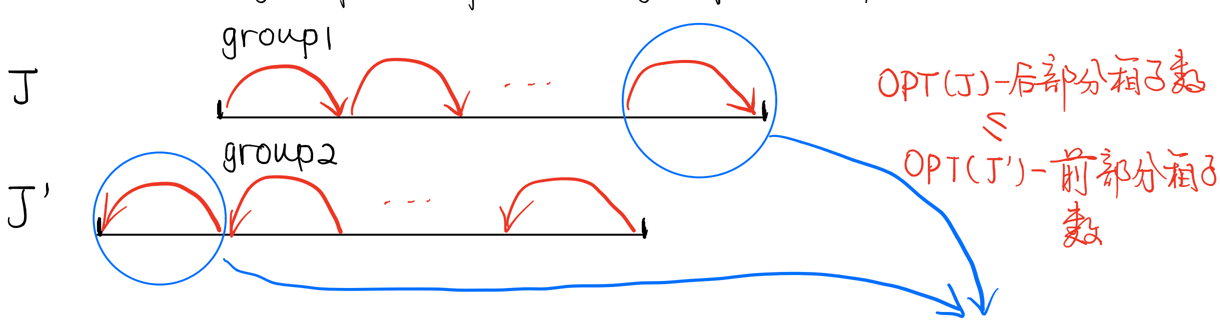
$$OPT(J) \ge OPT(I)$$



进行向下rounding $\Longrightarrow$ group中item的大小全部变成组中size最小值

$$OPT(I) \ge OPT(J')$$

同时，由于 group i 的最大值 < group $i+1$ 的最小值



$$\therefore\ OPT(J) \le OPT(J') + \Theta \qquad \Theta \le 2n\varepsilon^2$$

$$\le OPT(I) + \Theta$$

$$OPT(I) \ge \frac{n}{1/\varepsilon} = n\varepsilon$$ （每个箱子最多装$\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$个item）

$\theta \leq 2n\varepsilon^2 \leq 2\varepsilon \, OPT(I)$

$\therefore OPT(J) \leq (1+2\varepsilon) \, OPT(I)$

再考虑装 size < ε 的物品

如果这些物品都能被装在这OPT(J)个箱子中

则 $OPT(J) \leq (1+2\varepsilon) \, OPT(I)$ 仍成立

否则，将物品用First Fit塞进去并开新箱子后，

只可能最后一个Bin装的size之和 < $1-\varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > (1-\varepsilon)(OPT(J)-1)$$

$$OPT(I) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\therefore OPT(J) < \frac{1}{1-\varepsilon} OPT(I) + 1$$