对偶单纯形法

原问题如果是求 max,则

看单纯形法

	c^T	0	0
x_B	A	I_m	b

检验数

	$c^T - C_B^T A_B^{-1} A$	$-C_B^T A_B^{-1}$	$-C_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$A_B^{-1} A$	A_B^{-1}	$A_B^{-1} b$

可见，检验数≤ 0 对应于对偶解可行的情况

所以，实质上是从原始可行解改进到对偶可行解

对偶单纯形法是从对偶可行解改进到原始可行解

若是求问 max问题，先得到可行解，再改进到检验数 ≤ 0

$$
\begin{cases}
c^T - C_B^T A_B^{-1} A \leq 0 \\
-C_B^T A_B^{-1} \leq 0
\end{cases}
$$

① $C_B^T A_B^{-1} A \geq c^T$ 取转置 $A^T (C_B^T A_B^{-1})^T \geq c$

② $C_B^T A_B^{-1} \geq 0$

令 $y = (C_B^T A_B^{-1})^T$ $\begin{cases} A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$ wow 满足对偶问题的约束

$y^T b = C_B^T A_B^{-1} b$

例：

$$\max\ -6.8x_1-3x_2$$

$$\begin{aligned}
2.6x_1+x_2-x_3&=8000\\
3.8x_1+3x_2-x_4&=1000\\
1.6x_1+x_2-x_5&=100\\
6x_1+10x_2-x_6&=6000\\
x_1,x_2,\cdots,x_6&\geq 0
\end{aligned}$$

对偶可行，检验数≤0

	-6.8	-3	0	0	0	0	0
x_3	-2.6	-1	1	0	0	0	-800
x_4	-3.8	-3	0	1	0	0	-1000
x_5	-1.6	-1	0	0	1	0	-100
x_6	-6	-10	0	0	0	1	-6000

	-6.8	-3	0	0	0	0	0
x_3	-2.6	-1	1	0	0	0	-800
x_4	-3.8	-3	0	1	0	0	-1000
x_5	-1.6	-1	0	0	1	0	-100
x_6	-6	-10	0	0	0	1	$\boxed{-6000}$

①出基
x_6小得太离谱
出基

②入基选择
选择 x_2 入基
若选择 -6这一项，会使得检验数变正，对偶不可行

但不满足原始条件

接下来要在保证对偶可行

的前提下改进到原始可行

②入基

	-5	0	0	0	0	-0.3	1800
x_3	-2	0	1	0	0	-0.1	$\boxed{-200}$
x_4	-2	0	0	1	0	-0.3	800
x_5	-1	0	0	0	1	-0.1	500
x_2	0.6	1	0	0	0	-0.1	600

① 出基

对偶可行

	0	0	-2.5	0	0	-0.05	2300
x_1	1	0	-0.5	0	0	0.05	100
x_4	0	0	-1	1	0	-0.2	1000
x_5	0	0	-0.5	0	1	-0.05	600
x_2	0	1	0.3	0	0	-0.13	540

原始可行

解为 -2300