第九讲贪心算法

一. 基本定义：独立集系统

$(E, \mathcal{F})$ E 有限基本元素集合

$\mathcal{F} \subseteq 2^E$ （E 的幂集的子集）

满足 ① $\phi \in \mathcal{F}$

② $\forall Y \in \mathcal{F}, X \subseteq Y \rightarrow X \in \mathcal{F}$

即 $Y \in \mathcal{F}$，则其子集也 $\in \mathcal{F}$

则 $\mathcal{F}$ 中的元素称为独立集

- $F \subseteq E$ 上的"极大独立集"称为 F 的一个基 ← 任何一个元素加进来就不是独立集
- $2^E \setminus \mathcal{F}$ 中的元素：相关集
- 圈：极小相关集 ← 删掉一个元素就变成独立集？
- 秩：
  $r(F)$
  $= \max\{|Y|, Y \subseteq F, Y \in \mathcal{F}\}$
- 下秩
  $\rho(F)$
  $= \min\{|Y|, Y \subseteq F, Y \text{是} F \text{上的基}\}$
- 秩商 $q(E, \mathcal{F}) = \min\limits_{F \subseteq E} \dfrac{\rho(F)}{r(F)}$

优化问题 $(E, \mathcal{F}, c)$

独立集系统　费用

$c: \mathcal{F} \to R$

求$\mathcal{F}$中的一个独立集 x,使得成c(x)最大或最小

常见 $c(x) = \sum_{e \in x} c(x)$ 边的权重之和

- **极大化问题:** $(E, \mathcal{F}, c)$

  寻找权重最大的独立集

- **极小化问题** $(E, \mathcal{F}, c)$

  寻找权重最小的极大独立集

- **例子**

① MST

$G = (V, E)$

$(E, \mathcal{F}, c)$　E是边集

$\mathcal{F} = \{T, T \subseteq E, T是无圈子图\}$

② 背包问题

E: 物品

$\mathcal{F}$: 能被容纳的物品的集合

③ 最短路问题

E: 边集

$\mathcal{F}$: (s, t)路的子图

④ TSP

E: 边集

$\mathcal{F}$: 哈密尔顿圈的子图

$(E, \mathcal{F}, c)$ **极大化问题的贪心算法**

1.

$F := \emptyset$ $\qquad\qquad$ $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$

For $i=1$ to n $\qquad\qquad$ **Best in**

  if $F \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}$

    $F := F \cup \{e_i\}$

2.

$F := E$ $\qquad\qquad$ $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$

For $i=1$ to n

  if $F \setminus \{e_i\}$ 含基 $\qquad\qquad$ **Worst out**

    $F = F \setminus \{e_i\}$

定理：对任一极大化问题 $(E, \mathcal{F}, c)$

有 $G(E, \mathcal{F}, c) \longrightarrow$ Greedy 得到的目标函数值

$$q(E, \mathcal{F}) \leq \frac{G(E, \mathcal{F}, c)}{OPT(E, \mathcal{F}, c)} \leq 1$$

证明：

$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

Greedy G_n $\qquad$ $G_j = G_n \cap E_j$ $\qquad$ $E_j = \{e_1, e_2, \cdots, e_j\}$

OPT O_n $\qquad$ $O_j = O_n \cap E_j$ $\qquad$ $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_n$

$G_0 = O_0 = \emptyset$

$$c(G_n) = \sum_{j=1}^{n} (|G_j| - |G_{j-1}|) \cdot c_j \qquad |G_j|\text{：元素数量}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |G_j| (c_j - c_{j+1})$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} \rho(E_j)(c_j - c_{j+1}) \quad [G_j\text{是}E_j\text{的一个极大独立集}$$

$$\geq q \sum_{j=1}^{n} r(E_j)(c_j - c_{j+1}) \quad [q(E,\mathcal{F}) = \min_{F\subseteq E} \frac{\rho(F)}{r(F)}$$

$$\geq q \sum_{j=1}^{n} |O_j|(c_j - c_{j+1}) \quad [r(F) = \max\{|Y|, Y\subseteq F, Y\in\mathcal{F}\}$$

$$= q\, c(O_n)$$

再证下界是紧的

$\exists F$, $\frac{\rho(F)}{r(F)} = q(E,\mathcal{F})$

$\exists F$, F的基B_1和B_2满足$\frac{|B_1|}{|B_2|} = q(E,\mathcal{F})$

定义 $c(e) = \begin{cases} 1 & e\in F \\ 0 & e\notin F \end{cases}$

然后把B_1的元素排在前面形成$e_1, e_2, \cdots, e_{|B_1|}$

后面随便排

使用上述贪心算法，会选择前面$|B_1|$个元素

最优解可以选$|B_2|$个元素

独立集系统的对偶

$(E, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{F}^*)$

$\mathcal{F}^* = \{ X \subseteq E \mid \exists \mathcal{F}$的一个基$B$, s.t. $X \cap B = \emptyset \}$

性质:

1. $(E, \mathcal{F}^*)$ **是一个独立集系统**

① $\emptyset \subseteq \mathcal{F}^*$

② $X \cap B = \emptyset$, 若$Y \subseteq X$, $Y \cap B = \emptyset$

2. 若B是$(E, \mathcal{F})$的基$\Longleftrightarrow E \setminus B$是$(E, \mathcal{F}^*)$的基

若A是$(E, \mathcal{F}^*)$的一个基, 则$\exists B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$

$A = E \setminus B$

3. $(E, \mathcal{F}^{**}) = (E, \mathcal{F})$

$\forall x \in \mathcal{F}^{**} \Longleftrightarrow \exists (E, \mathcal{F}^*)$的一个基$B^*$, $x \cap B^* = \emptyset$

$\Longleftrightarrow \exists (E, \mathcal{F})$的一个基$B$, $x \cap (E \setminus B) = \emptyset$

$\Longleftrightarrow \exists (E, \mathcal{F})$的一个基$B$, $x \subseteq B$, $x \subseteq \mathcal{F}$

对偶

$$1 \leq \frac{G(E, \mathcal{F}, c)}{OPT(E, \mathcal{F}, c)} \leq \max_{F \neq \emptyset} \frac{|F| - \rho^*(F)}{|F| - r^*(F)}$$

拟阵 (Matroid)

$(E, \mathcal{F})$ 是一个独立集系统

(M1): $\emptyset \in \mathcal{F}$

(M2): 若 $X \in \mathcal{F}$, $\forall Y \subseteq X$, $Y \in \mathcal{F}$

(M3): 若 $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| > |Y|$, 则 $\exists e \in X \setminus Y$, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

也就是说Y可以扩充

(M3') 若 $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| = |Y| + 1$, 那么 $\exists e \in X \setminus Y$, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

(M3'') $\forall F \subseteq E$, F上的任何基有相同的元素个数

$E = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$

拟阵的例子

$\mathcal{F} = \{Z \subseteq E \mid Z$

① $E = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 向量拟阵

$\mathcal{F} = \{Z \subseteq E \mid Z$ 是线性无关组$\}$

② E 是有限集合

K 是一个给定的正整数 一致拟阵

$\mathcal{F} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq K\}$

③ E 是无向图G 中的边集 图拟阵

$\mathcal{F} = \{X \subseteq E$, X 构成一个森林$\}$

拟阵的交

$(E,\mathcal{F}_1)$，$(E,\mathcal{F}_2)$，其交为 $(E,\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2)$

定理：任何一个独立集系统一定是有限个拟阵的交

证：用构造法证明

考虑 $(E,\mathcal{F})$

不妨设独立集系统有k个圈：$C_1, C_2, \cdots, C_k$

$\mathcal{F}_i=\{X\subseteq E \mid X \not\supseteq C_i\}$

$(E,\mathcal{F}_i)$ 是独立集系统

下证：$\mathcal{F}_i$ 是拟阵：用M3''，$\forall F\subseteq E$，F上的任何基有相同的元素个数

$$\forall F\subseteq E \quad \begin{cases} ① F\not\supseteq C_i & F\text{是极大独立集，F上基的元素个数相等} \\ ② F\supseteq C_i & \forall e\in C_i,\ F\setminus\{e\}\text{是极大独立集，F上基的元素个数相等}\end{cases}$$

$\therefore \mathcal{F}_i$ 是拟阵

欲证 $\mathcal{F}=\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{F}_i \Rightarrow$ 即证集合的相互包含

$\forall X\in\mathcal{F}$，X不包含任何圈 $\Longrightarrow X\in\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{F}_i$

反过来同样也成立

若独立集系统 $(E,\mathcal{F})$ 是k个拟阵的交，则贪心解的近似比至少为 $\frac{1}{k}$

证：

设 $F\subseteq E$，考虑 $(E,\mathcal{F})$ 在F上两个不同的极大

独立集A，B，$|B|\geq|A|$

欲证 $|B|\leq k|A|$

A_i 是 $(E,\mathcal{F}_i)$ 在 $A\cup B$ 上，含A的极大独立集

B_i 是 $(E,\mathcal{F}_i)$ 在 $A\cup B$ 上，含B的极大独立集

$\forall e\in B\setminus A$，有 $e\notin\bigcap_{i=1}^{k}(A_i\setminus A)$

则e不可能同时在 A_i，e最多同时出现在 $k-1$ 个 $A_i\setminus A$ 中

$\sum_{i=1}^{k}|A_i\setminus A|\leq(k-1)|B\setminus A|\leq(k-1)|B|$

同理：$k|B| \le \sum_{i=1}^{k} |B_i| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| \le k|A| + (k-1)|B|$

$|B| \le k|A|$

另一种证明：

反证：若 $e \in \bigcap_{i=1}^{k} (A_i \setminus A)$

$\forall i,\ e \in A_i \setminus A$

$\Rightarrow A \cup \{e\} \in \mathcal{F}_i$

$A \cup e \in \mathcal{F}$，与 A 是极大独立集矛盾