Linear Programming 的对偶性理论

引入：

例： $\text{Max } Z = \overset{k_1}{4}x_1 + \overset{k_2}{1}x_2 + \overset{k_3}{3}x_3$ ①

$x_1 + 4x_2 \leq 1$ ②

$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$ ③

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

用②③可以得到①的上界

比如 $3\times③ + ② = \overset{k_1'}{10}x_1 + \overset{k_2'}{1}x_2 + \overset{k_3'}{3}x_3 \leq 10$

系数 $k_1' \geq k_1$， $k_2' \geq k_2$， $k_3' \geq k_3$ 而且 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\therefore Z \leq 3\times③ + ② \leq 10$

可以用不等式去构造目标函数

$y_1 \cdot ② + y_2 \cdot ③$ ⟵ y_1个不等式② + y_2个不等式③

$y \geq 0$，因为 $y < 0$ 会导致不等式变号

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 4 \Rightarrow k_1' \geq k_1 \\ 4y_1 - y_2 \geq 1 \Rightarrow k_2' \geq k_2 \\ y_2 \geq 3 \Rightarrow k_3' \geq k_3 \end{cases}$$

$y_1 \geq 0$， $y_2 \geq 0$

则 $y_1 + 3y_2$ 是 Z 的上界

则要求 $\min(y_1 + 3y_2)$

由此，得到一个新的线性规划

$\min\ y_1 + 3y_2$

$y_1 + 3y_2 \geq 4$

$4y_1 - y_2 \geq 1$

$y_2 \geq 3$

$y_1, y_2 \geq 0$

↓ 此问题求min往下逼近

↑ 原问题求max往上逼近

碰到一起就是最优解，夹逼

从另一个角度来理解对偶

$x_1 . x_2 . x_3$ 代表产品，各个约束来代表原料的限制

$$\text{Max} \quad z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$x_1 + 4x_2 \le 10 \quad \text{共有10份}$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \le 30 \quad \text{共有30份}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$$

产品	x_1	x_2	x_3
售价	4元	1元	3元
原料1	1份	4份	0
原料2	3份	1份	1份

对偶问题就是
你不需要生产产品，有人直接向你买原料，
那么那个人每种原料出多少钱，你相比生产
产品不会亏甚至能赚呢?
购买原料的人希望价格越低越好，
你希望生产产品的价格越高越好

以y_1的价格收购原料1，以y_2的价格收购原料2

$$\min \quad 10y_1 + 30y_2$$

$$y_1 + 3y_2 \ge 4$$

$$4y_1 + y_2 \ge 1$$

$$y_2 \ge 3$$

$$y_1 , y_2 \ge 0$$

原问题有几个约束函数，对偶问题就有几个变量
原问题目标函数的系数跑到了约束函数

从上述例子，我们可以看到规律

prime

$$\max\ c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax \le b,\ x \ge 0$$

Dual

$$\min\ y^T b \quad \text{s.t.}\ A^T y \ge c,\ y \ge 0$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

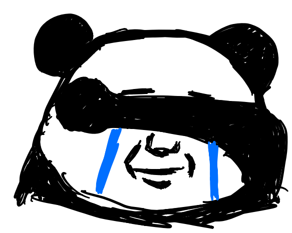
这时候想到一个问题

$$\max\ c^T x \quad \text{s.t.}\ Ax = b,\ x \ge 0$$

这种对偶怎么转换呢?

$$Ax = b \longrightarrow \begin{array}{l} Ax \le b \\ -Ax \le -b \end{array} \qquad \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

这也太强了！orz



$$\begin{array}{l} \max\ c^T x \\ \text{s.t.}\ A'x \le b' \\ \quad x \ge 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \min\ y^T b' \\ \text{s.t.}\ A'^T y \ge c \\ \quad y \ge 0 \end{array}$$

$$A'^T = [A^T\ -A^T] \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \min(y_1 b - y_2 b) \\ \text{s.t.}\ A^T y_1 - A^T y_2 \ge c \\ \quad y_1, y_2 \ge 0 \end{array} \Rightarrow \text{令 } y = y_1 - y_2 \quad \begin{array}{l} \min\ y \\ \text{s.t.}\ A^T y \ge c \end{array}$$

wow，没有 $y \ge 0$ 的限制了

为什么会没有 y 符号的限制

考虑

$$\begin{array}{ll} \max & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s.t.} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \quad ② \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \quad ③ \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & \underline{b_1 y_1 + b_2 y_2} \\ \text{s.t.} & a_{11} y_1 + a_{21} y_1 \ge c_1 \\ & a_{12} y_1 + a_{22} y_2 \ge c_2 \end{array}$$

因为"="，所以不用考虑不等式变号问题，∴ y 没有符号限制

对偶形式

原始 $(\boldsymbol{P})$ 　　　　　　　　 对偶 $(\boldsymbol{D})$

$$
\begin{array}{lrlllr}
max & c^T x & & & min & y^T b \\
s.t. & a_i^T x \leq b_i & i = 1, \ldots, p & & s.t. & y_i \geq 0 \\
 & a_i^T x \geq b_i & i = p+1, \ldots, l & & & y_i \leq 0 \\
 & a_i^T x = b_i & i = l, \ldots, m & & & y_i \lessgtr 0 \\
 & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, q & & & A_j^T y \geq c_j \\
 & x_j \leq 0 & j = q+1, \ldots, h & & & A_j^T y \leq c_j \\
 & x_j \lessgtr 0 & j = h, \ldots, n & & & A_j^T y = c_j
\end{array}
$$

定理:

$$\max c^T x \quad Ax \le b \quad x \ge 0$$

$$\min y^T b \quad A^T y \ge c \quad y \ge 0$$

1. 弱对偶定理:

x. y 分别是(P)和(D)的可行解

则 $c^T x \le y^T b$

$Ax \le b \Rightarrow y^T A x \le y^T b$

$A^T y \ge c \Rightarrow y^T A \ge c^T$

$y^T A x \ge c^T x$

$\Rightarrow c^T x \le y^T A x \le y^T b$

2. 无界性

若(P),(D)中有一个有无限最优解，则另一个无可行解

（两个都无可行解也是可以的）

3. 最优性

x,y是各自的可行解

$c^T x = y^T b$，x, y 都是各自的最优解

4. 强对偶定理

解的值有限大

若(P)和(D)其中一个有有限最优解,则另一个也有有限最优解，且二者目标函数值相等

看单纯形法

$$Ax + I_m x_m = b$$

	c^T	0	0
x_B	A	I_m	b

$$AX = A_B X_B + A_N X_B$$

要让 X_B 的系数矩阵变成 I，因此两边同时乘 A_B^{-1}

	$c^T - C_B^T A_B^{-1} A$	$-C_B^T A_B^{-1}$	$-C_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$A_B^{-1} A$	A_B^{-1}	$A_B^{-1} b$

X_B 的系数变成 I 后，要在目标函数中使 X_B 系数变为 0，乘上 $-C_B^T$ 加到目标函数

$$\begin{cases} c^T - C_B^T A_B^{-1} A \le 0 \\ -C_B^T A_B^{-1} \le 0 \end{cases}$$

$C_B^T A_B^{-1} A \ge C^T$ 取转置 $A^T (C_B^T A_B^{-1})^T \ge C$

$C_B^T A_B^{-1} \ge 0$

令 $y = (C_B^T A_B^{-1})^T$ $\begin{cases} A^T y \ge C \\ y \ge 0 \end{cases}$

wow 满足对偶问题的约束

$y^T b = C_B^T A_B^{-1} b$

$A^T y \ge C$ $\quad$ $y \ge 0$ $\quad$ 目标函数

	$c^T - C_B^T A_B^{-1} A$	$-C_B^T A_B^{-1}$	$-C_B^T A_B^{-1} b$
x_B	$A_B^{-1} A$	A_B^{-1}	$A_B^{-1} b$

单纯形法包含了好多信息

5. **互补松弛定理**

x. y 分别是(P)，(D)的可行解

那么

x.y 是最优解 $\iff$
$$\begin{cases} (A^Ty-c)^Tx=0 \\ (Ax-b)^Ty=0 \end{cases}$$

对偶问题的约束

原问题变量

$A^Ty \geq c \Rightarrow y^TAx \geq c^Tx$

$Ax \leq b \Rightarrow y^TAx \leq y^Tb$

$y^Tb \geq y^TAx \geq c^Tx$

当 $y^Tb=y^TAx$ 且 $y^TAx \geq c^Tx$ 时

可取到最优解

即 $(Ax-b)^Ty=0$

$(A^Ty-c)^Tx=0$