## 考虑

$$(P)\quad \min c^T x \quad s.t.\ Ax=b,\ x\geq 0$$

$$(D)\quad \max y^T b \quad y^T A \leq c^T$$

## 互补松弛条件

回顾一下之前的

5. 互补松弛定理

x. y 分别是(P)，(D)的可行解

那么

x.y 是最优解 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}(A^Ty-c)^Tx=0 \\ (Ax-b)^Ty=0\end{cases}$

对偶问题的约束　原问题变量

$A^Ty\geq c \Rightarrow y^TAx\geq c^Tx$

$Ax\leq b \Rightarrow y^TAx\leq y^Tb$

$y^Tb\geq y^TAx\geq c^Tx$

当 $y^Tb=y^TAx$ 且 $y^TAx\geq c^Tx$ 时可取到最优解

即 $(Ax-b)^Ty=0$

$(A^Ty-c)^Tx=0$

在这里

互补松弛条件

$$\begin{cases}(c^T-y^TA)x=0 \\ (Ax-b)y=0\end{cases}$$

思路：给出一个对偶的解，强行去满足互补松弛条件

然后看得到的 x 是否满足原问题的约束

如果满足约束，则 x，y 都是可行的且满足互补松弛条件，所以 x，y 是对应问题的最优解

如果X不能满足原问题的约束，说明给出的 y 就有问题，要对 y 不断修正重复上述过程

## 设y是一个对偶可行解

① 强行满足互补松弛条件

$$\begin{cases}(C^T-y^TA)x=0 \\ (Ax-b)y=0\end{cases} \rightarrow J=\{j \mid y^TA_j=C_j\}, \quad \forall j\notin J,\ x_j=0$$

这里天然满足

② 判断X是否是可行解 $[Ax=b,\ x\geq 0]$

约束: $Ax=b$

$x_j \geq 0 \quad j\in J$

$x_j = 0 \quad j\notin J$

限制规划问题

引入人工变量

$$(RP)\quad \min \sum_{i=1}^{m} x_i^a$$

$$\text{s.t. } Ax+\vec{x}^a=b$$

$$x_j \geq 0 \quad j\in J$$

$$x_j = 0 \quad j\notin J$$

若目标函数最优解为0，

说明可以满足原问题的约束

③ RP 的对偶

$$\min [0\ 0 \cdots\ 1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n \\ x_1^a \\ \vdots \\ x_m^a\end{bmatrix}$$

$$[A\ E]\begin{bmatrix}x\\ x^a\end{bmatrix}=b$$

$$x_j\geq 0 \quad j\in J$$

$$x_j = 0 \quad j\notin J$$

(DRP)

$$\max y^Tb$$

$$y^TA_j \leq 0 \quad j\in J$$

$$y_i \leq 1 \quad i=1,2,\cdots,m$$

可以看到 y =0一定是一个解

$\therefore \max y^Tb \geq 0$

设 $\bar{y}$ 是 (DRP) 的最优解

- 若 $\bar{y}^Tb=0$, 即目标函数最优为0

  根据强对偶定理， RP 也有有限最优解，
  目标函数最优也为0
  因此，y是(D)的最优解
  结束！

- 否则 $\bar{y}^Tb>0$

  y不是(D)最优解，怎么改进 y?

**构造**

$y' = y + \theta\bar{y} \quad \theta > 0$

则 $y'^T b = y^T b + \theta\bar{y}^T b > y^T b$（因为 $\bar{y}^T b > 0$）

$y'$ 比 $y$ 好

原来有约束 $y^T A \le c^T$

**有限步能终止**

**因为对偶可行解的**

**改进对应了对偶可行基的变化。**

**基的个数有限**

**下说明y'满足约束**

$y'^T A = y^T A + \theta\bar{y}^T A$

希望：$y^T A + \theta\bar{y}^T A \le c^T$

① 若 $j \in J$ $[y^T A_j = c_j]$

看(DRP)约束：$\bar{y}^T A_j \le 0 \quad j \in J$

因此：$y^T A_j + \theta\bar{y}^T A_j \le y^T A_j \le c^T$

满足约束

② 若 $j \notin J$ $[y^T A_j \ne c_j]$

原来有 $y^T A_j < c_j$

因此 $\theta$ 还有一定的取值空间

s.t. $y'^T A_j = y^T A_j + \theta\bar{y}^T A_j \le c_j$

取 $\theta = \min\limits_{\substack{j \notin J \\ \bar{y}^T A_j > 0}} \dfrac{c_j - y^T A_j}{\bar{y}^T A_j}$ **夹得最紧的情况**

## 原始对偶算法求的解最短路径问题

### 关联矩阵

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & \cdots & e_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & & \\ +1 & & \\ \vdots & & \\ -1 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$+1 \; \bullet \longrightarrow \bullet \; -1$

出度 入度

**共识：最短路的解是弧的集合**

**目标函数是弧的费用之和**

**问题是怎么刻画可行域?**

对 $e \in E$， $f_e = \begin{cases} 1 & \text{这边选到了} \\ 0 & \text{这边没选到} \end{cases}$ [整数规划后面讲 此处考虑 $f_e \geq 0$]

**写出规划** $\min \sum_{e \in E} C_e f_e$

$$(P) \quad Af = \begin{cases} 1 & v = s \quad \text{一条出边} \\ -1 & v = t \quad \text{一条入边} \\ 0 & v \in V \setminus \{s, t\} \end{cases}$$

$$f_e \geq 0$$

**因为A中行向量线性相关**

**[所有的边有出有入，所有行相加必为0]**

**对偶中可以去掉A中一行**