

从一个例子讲起

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

→
标准
形式

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

松弛
变量

构造初始可行解

$$x^{(0)} = (0, 0, 3, 1)^T, z = 0$$

典则形式：用非基变量表示基变量和目标函数

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 1 - x_2 \\ z = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

显然目标函数可以改进

x_2 入基, x_1 不变, $x_4 = 1 - x_2$ 先出基

$$x^{(1)} = (0, 1, 2, 0)^T, z = 2$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 2 - x_1 + x_4 \\ z = x_1 - 2x_4 + 2 \end{cases}$$

x_1 入基, x_2 不变, $x_3 = 2 - x_1 + x_4 = 0$ 出基

$$x^{(2)} = (2, 1, 0, 0)^T, z = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 + x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ z = 4 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

检验数 ≤ 0 , 达到最优解

抽象形式

B: Basic N: non-Basic

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad A = [A_B \ A_N]$$

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

典则形式

$$\begin{cases} x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ C^T x = C_B^T x_B + C_N^T x_N \\ \quad = C_B^T A_B^{-1} b + \underbrace{(C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\text{检验数}} x_N \end{cases} \leftarrow \begin{aligned} & A_B x_B = b - A_N x_N \\ & x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \end{aligned}$$

令 $\bar{A} = A_B^{-1} A_N = (\bar{a}_{ij})_{m \times (n-m)}$

若非基变量 x_j ($j = m+1, \dots, n$) 的检验数

$$\sigma_k = C_k - \sum_{i=1}^m C_i \bar{a}_{ik} \quad k = j - (m+1)$$

因为 x_{m+1} 对应 $\sigma_0, C_0, \bar{a}_{i0}$

求 max, 若 $\sigma_k \leq 0$, 则 $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ 为最优解

若 $\exists \sigma > 0$ 且 $\bar{a}_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, m$, 则无有限最优解 (x 越大越好)

	C_B	C_N	
x_B	A_B	A_N	b

$\leadsto A_B x_B + A_N x_N = b$

		检验数	目标值相反数	
	0	$C_N - C_B^T A_B^{-1} A_N$	$-C_B^T A_B^{-1} b$	\leadsto
x_B	$I_{m \times m}$	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$	$Z - C_B^T A_B^{-1} b$
	单位矩阵			$= (C_N - C_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$

$$x_i + \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$$

$\min_{\bar{a}_{ij} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}$ 对应的 i 出基

举例:

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

先化成标准形式

$$\begin{aligned} \max Z &= x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

构造一组初始可行解 $(0, 0, 3, 1)^T$ $Z=0$
先以 x_3, x_4 为基

典则形式

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

	1	2	0	0	
x_3	1	1	1	0	3
x_4	0	1	0	1	1

入基

x_2 入基, 选谁出基?

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ 让 x_2 逐渐增大, 发现先被 $x_2 + x_4 = 1$ 限制住
 $x_2 + x_4 = 1$ 所以 x_4 出基

	1	2	0	0	0
x_3	1	1	1	0	3
x_2	0	1	0	1	1

不满足典则形式

① ① - 2 × ③
② ② - ③
③

入基

	1	0	0	-2	-2
x_3	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

x_1 入基, x_3 出基

	1	0	0	-2	-2
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

检验数都 ≤ 0

	0	0	-1	-1	-4
x_1	1	0	1	-1	2
x_2	0	1	0	1	1

$$x^* = (2, 1, 0, 0) \quad z^* = 4$$